Tareas 4 y 5

Modelos Estocásticos

Fecha de entrega: Los problemas 1 al 4 se entregan a más tardar el Martes 30 de octubre de 2018 a la hora de clase. Los problemas 4 al 7 se entregan a más tardar el Martes 6 de noviembre de 2018 a la hora de clase.

1. Problemas Tarea 4

PROBLEMA 1. *Se tira un dado de forma repetida. Sea X_n es la suma de los primeros n lanzamientos.*

a) Encuentra

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \text{ es par}).$$

b) Encuentra

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \text{ es divisible por } 13).$$

PROBLEMA 2. *Sea $(X_n)_n \geq 0$ una cadena de Markov con espacio de estados $\{0, 1, ...\}$ y probabilidades de transición dadas por*

$$p_{01} = 1,\ p_{i,i+1} + p_{i,i-1} = 1 \text{ y } p_{i,i+1} = \left(\frac{i+1}{i}\right)^2 p_{i,i-1}, \quad i > 0$$

Muestra que empezando en 0 la probabilidad de eventual retorno a 0 es $1 - 6/\pi^2$.

PROBLEMA 3. *Para cada una de las siguientes matrices de transición determina el tiempo medio de llegada a 1 desde 4.*

$$a)\begin{pmatrix} .3 & .7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .3 & 7 \\ 0 & 0 & .9 & .1 \\ .1 & .9 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad b)\begin{pmatrix} .3 & .7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ .1 & .9 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad c)\begin{pmatrix} .3 & .7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ .1 & .9 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e)\begin{pmatrix} .4 & .3 & .2 & .1 & 0 \\ .4 & .3 & .2 & .1 & 0 \\ .4 & .3 & .2 & .1 & 0 \\ .4 & .3 & .2 & .1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

PROBLEMA 4. *1) Simule las cadenas en el Problema 3 y compare con los resultados obtenidos.*

2) Calcule potencias de las matrices en el Problema 3 y compare con le medida invariante.

2. Problemas Tarea 5

Problema 5. *Sea* $(X_n)_{n\geq 0}$ *una caminata aleatoria on* $\mathbb{Z}$ *con* $p_{i,i-1} = q < p = p_{i,i+1}$. *Encuentre*

$$\gamma_i^0 = \mathbb{E}_0 \left(\sum_{n=0}^{T_0 - 1} 1_{\{X_n = i\}} \right)$$

y verifique que

$$\gamma_i^0 = \inf_{\lambda} \lambda_i \text{ para todo } i$$

en donde el ínfimo se toma sobre todas la medidas invariantes λ, *con* $\lambda_0 = 1$.

Problema 6. *Sea* $(X_n)_{n\geq 0}$ *una cadena de Markov con espacio de estados* $\{0, 1, ...\}$ *probabilidades de transición dadas por*

$$p_{i,i+1} = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{i+2}))\ i \geq 0, \qquad p_{i,i-1} = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{i+2})\ i \geq 1$$

y $p_{00} = 1 - p_{01} = 3/4$. *Determine si la cadena es transitoria, recurrente nula o recurrente positiva. En este último caso, halle la distribución estacionaria.*

Problema 7. *Consideremos una variación del proceso de ramificación en donde e mecanismo de ramificiación depende del tiempo. En tiempos pares la reproducción se lleva a cabo con distribución* ϵ_1 *y en tiempos impares con disitribución* ϵ_2.

1) Halle una ecuación para U_n *en términos de* U_{n-1}.

2) Halle una ecuación funcional para la probabilidad de extinción en terminos de $\phi_1(s)$ *y* $\phi_2(s)$, *las funciones generadoras de* ϵ_1 *y* ϵ_2.

3) De un criterio para determinar cuándo la probabilidad de extinci'on es 1, *en téminos de las medias de* ϵ_1 *y* ϵ_2.

Problema 8. *Tenemos dos cajas y* $2N$ *bolas de las cuales* N *son rojas y* N *negras. Comenzamos con* N *bolas en cada caja y en cada paso escogemos una bola al azar de cada caja y las intercambiamos. Si* X_0 *es el número de bolas rojas en la caja de la izquierda al comienzo y* X_n, $n \geq 1$ *es el número de bolas rojas en la caja de la izquierda al final del n-ésimo paso, halle la matriz de transición y la distribución estacionaria.*